

Por una parte, consideremos $u = (a, b)$ con $b \neq 0$.

$$\begin{aligned} D_u f(x, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + at, bt) - f(x, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x + at)b^2 t^2 \sin\left(\frac{1}{bt}\right)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (x + at)b^2 t \sin\left(\frac{1}{bt}\right) = 0 \end{aligned}$$

luego la opción a) es verdadera.

Por otra parte, conviene comprobar (o recordar) que la función de una variable

$$g(y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

es derivable en toda la recta real (en particular $g'(0) = 0$), pero su derivada g' no es continua en $y = 0$.

Como $f(x, y) = xg(y)$, se tiene

$$D_1 f(x, y) = g(y); \quad D_2 f(x, y) = xg'(y)$$

Luego $D_1 f$ es continua en todo el plano, pero $D_2 f$ no es continua en los puntos $(x, 0)$ con $x \neq 0$.

Finalmente

$$D_u (D_1 f)(x, y) = D_u g(y) = b D_2 g(y) = b g'(y)$$

Luego $D_u (D_1 f)(0, 0) = b g'(0) = 0$.